BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1 Integral Tak Wajar

Definisi 1

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\ dx \qquad \ldots\ldots\ 2.1$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)\ dx \qquad \ldots\ldots\ 2.2$$

Integral tersebut dikatakan konvergen jika limit pada ruas kanan ada, jika limit itu tak ada dikatakan divergen.

Definisi 2

Apabila $\int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx$ dan $\int_{0}^{\infty} f(x)\ dx$ konvergen,

maka dikatakan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ konvergen dengan nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\ dx \qquad \ldots\ldots\ 2.3$$

dalam hal lain $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ divergen

Definisi 3

1. Jika f(x) menjadi discontinu pada titik x = a dari interval $a \le x \le b$, maka :

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \int_{a+\varepsilon}^{\infty} f(x)\ dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2.4$$

Apabila limit pada ruas kanan ada , maka integral ruas kiri konvergen, jika tidak ada maka divergen.

2. Jika f(x) menjadi discontinu pada titik x = b dari interval $a \le x \le b$, maka :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.5$$

Apabila limit pada ruas kanan ada , maka integral ruas kiri konvergen, jika tidak ada maka divergen.

3. Jika f(x) menjadi discontinu pada titik $x = x_o$ dari interval $a \le x \le b$, maka :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{x_o-\varepsilon} f(x)\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x_o+\varepsilon}^b f(x)\, dx \quad \ldots 2.6$$

Apabila limit pada ruas kanan ada , maka integral ruas kiri konvergen, jika tidak ada maka divergen.

Contoh 1

Tentukan $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx$,

Penyelesaian :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx$$

$$\int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b \frac{\cos x}{x}\, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} + \int_a^b \frac{\sin x}{x^2}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2\int_a^b \frac{\cos x}{x^3}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2\frac{\sin x}{x^3} + 6\int_a^b \frac{\sin x}{x^4}\,dx \right\}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2\frac{\sin x}{x^3} + 6\frac{\cos x}{x^4} + 24\int_a^b \frac{\cos x}{x^3}\,dx \right\}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2\frac{\sin x}{x^3} + 6\frac{\cos x}{x^4} + 24\frac{\sin x}{x^4} + 120\int_a^b \frac{\sin x}{x^6}\,dx \right\}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left\{ \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2\frac{\sin x}{x^3} + 6\frac{\cos x}{x^4} + 24\frac{\sin x}{x^4} - 120\frac{\cos x}{x^6}\Bigg|_a^b - 6!\int_a^b \frac{\cos x}{x^7}\,dx \right\}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left\{ \frac{\sin b}{b} - \frac{\cos b}{b^2} - 2\frac{\sin b}{b^3} + 6\frac{\cos b}{b^4} + 24\frac{\sin b}{b^4} - 120\frac{\cos b}{b^6} - \frac{\sin a}{a} + \frac{\cos a}{a^2} + \frac{2\sin a}{a^3} - 6\frac{\cos a}{a^4} - 24\frac{\sin a}{a^4} + 120\frac{\cos a}{a^6} - 6!\int_a^b \frac{\cos x}{x^7}\,dx \right\}$$

maka :

$$\int_a^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = -\frac{\sin a}{a} + \frac{\cos a}{a^2} + \frac{2\sin a}{a^3} - 6\frac{\cos a}{a^4} - 24\frac{\sin a}{a^4} + 120\frac{\cos a}{a^6} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\cos a}{a}\left[\frac{1}{a} - \frac{3!}{a^3} + \frac{5!}{a^5} - \ldots\ldots\right.$$

$$- \frac{\sin a}{a}\left[1 - \frac{2!}{a^2} + \frac{4!}{a^4} - \ldots\right.$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left\{ \frac{\cos a}{a} \left[\frac{1}{a} - \frac{3!}{a^3} + \frac{5!}{a^5} - \ldots\ldots \right] - \frac{\sin a}{a} \left[1 - \frac{2!}{a^2} + \frac{4!}{a^4} - \ldots\ldots \right] \right\}$$

$$= 0$$

2.2 Fungsi analitik

Definisi 4

Suatu fungsi f(z) dikatakan analitik pada suatu titik z_o jika terdapat suatu lingkungan $|z - z_o| < \delta$ sehingga $f^1(z)$ ada di setiap titik pada lingkungan tersebut.

f(z) dikatakan analitik dalam daerah R dan dinyatakan sebagai fungsi analitik dalam R jika turunan $f^1(z)$ ada di semua titik z dari suatu daerah R.

Theorema 1

Syarat perlu agar w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) analitik dalam suatu daerah R adalah persamaan Cauchy Rieman $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ dipenuhi dalam R.

Bukti :

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

$f(z+\Delta z) = f(x+\Delta x+i(y+\Delta y)) = u(x+\Delta x,y+\Delta y) + iv(x+\Delta x,y+\Delta y)$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)\}-\{u(x,y)+iv(x,y)\}}{\Delta x + i\Delta y} \quad . \; 2.7$$

Pandang dua kemungkinan pendekatan .

kasus I $\Delta y = 0$, $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)\} - \{u(x,y) + iv(x,y)\}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)\}}{\Delta x} + \frac{i\{v(x+\Delta x,y) - v(x,y)\}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad 2.8$$

kasus II, $\Delta x = 0$, $\Delta y \longrightarrow 0$ maka :

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)\} - \{u(x,y) + iv(x,y)\}}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\}}{i\Delta y} + \frac{i\{v(x,y+\Delta y) - v(x,y)\}}{i\Delta y}$$

$$= \frac{\partial u}{i\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.9$$

Karena f(z) analitik maka menurut definisi 4 $f^{1}(z)$ ada, maka kedua limitnya harus sama sehingga :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Jadi syarat perlu agar f(z) analitik adalah :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{(terbukti)}$$

Theorema 2

Jika f(z) analitik dengan turunan $f^{1}(z)$ kontinu di semua titik didalam dan pada kurva tertutup sederhana C maka :

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Bukti :

$f(z) = u + iv$ analitik dan memiliki turunan yang kontinu, maka :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

mengakibatkan bahwa turunan parsiil

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{..........} \; 2.12$$

Kontinu didalam dan pada C, dengan menggunakan aturan Green :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

$$= \int\int_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

Dengan menggunakan persamaan (2.12), maka :

$$\int_C f(z)\,dz = \int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy$$

$$= 0$$

Theorema 3

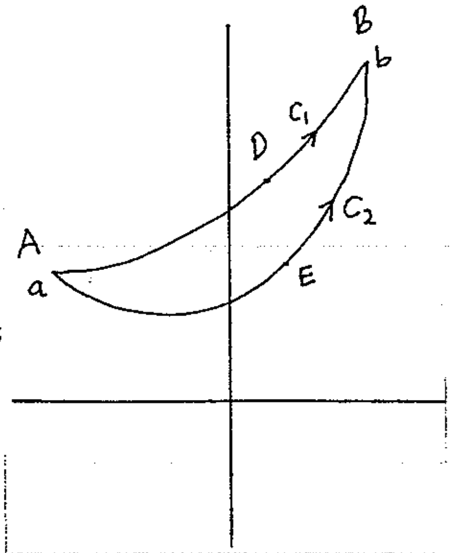
Jika $f(z)$ analitik dalam suatu daerah R, maka $\int_a^b f(z)\,dz$ tidak bergantung pada lintasan dalam R yang menghubungkan titik a dan b dalam R.

Bukti :

Menurut theorema 2 :

$$\int_{adbea} f(z)\,dz = 0$$

atau $\int_{adb} f(z)\,dz + \int_{bea} f(z)\,dz = 0$



Karena itu :

$$\int_{adb} f(z)\,dz = -\int_{bea} f(z)\,dz = \int_{aeb} f(z)\,dz$$

Jadi:

$$\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{c_2} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz$$

Theorema 4

Jika f(z) kontinu dalam suatu daerah tertutup sederhana R dan jika $\int_c f(z)\,dz = 0$ disekeliling setiap kurva tertutup sederhana C dalam R, maka f(z) analitik dalam R.

Bukti :

Jika $\int_c f(z)\,dz = 0$ tidak tergantung pada C, menurut Theorema 3 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ tidak bergantung pada lintasan yang menghubungkan z_0 dan z, sepanjang lintasan itu ada di dalam R.

Misal : f(z) = u + iv dan F(z) = U + iV , maka :

$$F(z) = U + iV = \int_{x_o,y_o}^{x,y} udx - vdy + i\int_{x_o,y_o}^{x,y} vdx + udy$$

sehingga : $U = \int_{x_o,y_o}^{x,y} udx - vdy$ dan $V = \int_{x_o,y_o}^{x,y} vdx + udy$

maka : $\frac{\partial U}{\partial x} = u$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -v$ dan $\frac{\partial V}{\partial x} = v$, $\frac{\partial V}{\partial y} = u$ ..2.13

Dari persamaan (2.13) terlihat bahwa :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

dengan kata lain U dan V memenuhi persamaan Cauchy Riemann , karena f(z) = u + iv kontinu maka u dan v kontinu , sehingga $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ kontinu, karena itu F(z) = U + iV adalah fungsi analitik, dengan demikian :

$F^1(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = f(z)$ juga analitik.

2.3 Tranformasi Fourier

2.3.1 Pengertian tranformasi Fourier

Tranformasi Fourier dari f(x) ditulis sebagai :

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.14$$

F(f) merupakan tranformasi Fourier dari f(x) dengan F(f) = F(s) dimana s adalah peubah hasil tranformasi, sedang invers tranformasi Fourier dari F(f) ditulis :

$f(x) = F^* F(f)$ dan dinyatakan sebagai

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F(f)\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.15$$

Jika f(x) merupakan fungsi genap yang berarti

$f(x) = f(-x)$ untuk semua x , maka :

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos sx\ f(x)\ dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \cos sx\ f(x)\ dx \qquad \text{........... } 2.16$$

F(f) merupakan tranformasi cosinus Fourier dari f(x) dan dinotasikan dengan $F_c(f)$.

Sedang invers tranformasi cosinus Fourier dinyatakan dengan :

$$f(x) = F^* F_c(f)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_c(s) \cos sx\ ds \qquad \text{.................... } 2.17$$

Apabila f(x) fungsi ganjil yang berarti $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x, maka :

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin sx\ f(x)\ dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \sin sx\ f(x)\ dx \qquad \text{........... } 2.18$$

F(f) merupakan tranformasi sinus Fourier dari f(x) dan dinotasikan dengan $F_s(f)$.

Sedang invers tranformasi sinus Fourier dinyatakan dengan :

$$f(x) = F^* F_s(f)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_s(s) \sin sx\ ds \qquad \text{.......... } 2.19$$

Theorema 5

a. Jika $F^*(f(x)) = F^*(s)$ maka $F^*(f(x-a)) = e^{-ias} F^*(s)$

b. Jika $F^*(f(x)) = F^*(s)$ maka $F^*(f(x+a)) = e^{ias} F^*(s)$

Bukti :

a. $F^*(f(x)) = F^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)\, dx$ maka

$$F^*(f(x-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x-a)\, dx$$

subtitusi : $x-a = u \longrightarrow x = u+a$

$dx = du$

untuk $x = -\infty \longrightarrow u = -\infty$

$x = \infty \longrightarrow u = \infty$

sehingga :

$$F^*(f(x-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(u+a)} f(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isu}\, e^{-isa} f(u)\, du$$

$$= e^{-isa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isu} f(u)\, du$$

$$= e^{-isa} F^*(s)$$. (terbukti)

b. $F^*(f(x+a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x+a)\, dx$

subtitusi: $x+a = u \longrightarrow du = dx$

untuk $x = -\infty \longrightarrow u = -\infty$

$x = \infty \longrightarrow u = \infty$

sehingga :

$$F^*(f(x+a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(u-a)} f(u)\, du$$

$$= e^{isa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isu} f(u)\, du$$

$$= e^{isa} F^*(s) \text{ . (terbukti)}$$

Theorema 6

Untuk fungsi k berlaku $\int_{-\infty}^{\infty} |k(x)|\, dx$ konvergen, yaitu k terintegral mutlak pada $[-\infty,\infty]$ maka :

$$\lim_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} k(x)\, dx = 0$$

Bukti :

Invers Tranformasi Fourier k(x) ,

$$F^*(k(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} k(x)\, dx \qquad \text{..... 2.20}$$

maka $F^*(k(x)) = e^{-\pi i} F^*(k(x))$, $e^{-\pi i} = -1$

$$= \frac{e^{-\pi i}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} k(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx-\pi i} k(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x+\pi/s)} k(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} k(x-\pi/s)\, dx \qquad \text{.....2.21}$$

Dari persamaan (2.20) - (2.21) diperoleh :

$$2F^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (k(x) - k(x-\pi/s))dx$$

$$|2F^*(k)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \, (k(x) - k(x-\pi/s))dx \right|$$

$$2|F^*(k)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \, (k(x) - k(x-\pi/s))dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-isx} \, (k(x) - k(x-\pi/s)) \right| dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \, k(x) - k(x-\pi/s) \right| dx$$

Karena k terintegral mutlak pada $[-\infty,\infty]$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $A > 0$ sedemikian sehingga :

$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \left| \, k(x) - k(x-\pi/s) \right| dx \right| < \varepsilon$, untuk $s > A$ atau :

$\lim\limits_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \, k(x) - k(x-\pi/s) \right| dx = 0$ maka :

$$2|F^*(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-isx} \, (k(x) - k(x-\pi/s)) \right| dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

$$|F^*(k)| < \frac{1 \quad \varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$$

Padahal:

$$|F^*(k)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \, k(x) \; dx \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$$

Sehingga : $\lim\limits_{s \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \, k(x) \; dx = 0$

(terbukti)

2.3.2 Konvolusi tranformasi Fourier

Definisi 5

Diberikan f(x) dan g(x) dua fungsi yang berada dalam $L_2[-\infty,\infty]$ maka konvolusi untuk fungsi f(x) dan g(x) didefinisikan :

$$f(x) * g(x) = (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\, dy$$

Theorema 7

Jika $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\, dy$, maka invers tranformasi Fourier untuk $(f * g)(x)$ adalah :

$F^*(f*g) = \sqrt{2\pi}\, F^*(f)F^*(g)$.

Bukti:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\, dy$$

$$F^*(f*g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (f*g)(x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} g(x-y)\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sqrt{2\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} g(x-y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sqrt{2\pi}\, F^*[g(x-y)]\, dy$$

menurut theorema 5 (a). $F^*(f(x-a)) = e^{-isa}\ F^*(f)$
sehingga :

$$F^*(f*g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ \sqrt{2\pi}\ e^{-isy}\ F^*(g)\ dy$$

$$= \sqrt{2\pi}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy}\ f(y)\ F^*(g)\ dy$$

$$= \sqrt{2\pi}\ F^*(f)\ F^*(g).\ (\text{ terbukti }).$$

Contoh 2

Tentukan tranformasi Fourier dari :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < a \\ 0 & , |x| > a \end{cases}$$

Jawab:

$$F(s) = F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\ f(x)\ \ dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{isx}\ 1\ dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{e^{isa} - e^{-isa}}{is}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin sa}{s} \quad , s \neq 0$$

untuk s = 0 maka $\lim\limits_{s \longrightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin sa}{s} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Jadi : $F(s) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad , s = 0$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin sa}{s} \quad , s \neq 0$$

Contoh 3

Dengan memperhatikan contoh 2,

Hitung : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$

Jawab :

Dari $f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < a \\ 0 & , |x| > a \end{cases}$ dan $F(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin sa}{s}$

Sehingga :

$F^{*}F(f) = f(x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\, F(f)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin sa}{s}\, ds$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\, \frac{\sin sa}{s}\, ds$$

maka :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\, \frac{\sin sa}{s}\, ds = \begin{matrix} 1 & , |x| < a \\ 0 & , |x| > a \end{matrix}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\, \frac{\sin sa}{s}\, ds = \begin{matrix} \pi & , |x| < a \\ 0 & , |x| > a \end{matrix}$$

Dengan mengambil $x = 0$ dan $a = 1$ maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds = \pi$$

Jadi : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \pi.$

2.4 Tranformasi Hilbert

2.4.1 Pengertian Tranformasi Hilbert

Tranformasi Hilbert dari fungsi $\phi(x)$ dinyatakan sebagai:

$$H(\phi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(u)\ du}{x - u} \qquad \ldots\ldots\ 2.21$$

Sedang invers tranformasi Hilbert adalah :

$$\phi(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H\phi(u)\ du}{x - u} \qquad \ldots\ldots 2.22$$

2.4.2 Formula ekivalen tranformasi Hilbert

Formula ekivalen tranformasi Hilbert dapat diperoleh dengan mensubtitusikan $u = x + y$ ke persamaan (2.21) sehingga :

$u = x + y$ maka $y = u - x$

$du = dy$

untuk $u = -\infty \longrightarrow y = -\infty$

$u = \infty \longrightarrow y = \infty$

maka :

$$H(\phi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x + y)\ dy}{x - (x + y)}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x + y)\ dy}{y} \qquad \ldots\ldots\ldots\ 2.23$$

sehingga formula (2.23) merupakan formula yang ekivalen dengan persamaan (2.21). Selanjutnya untuk memudahkan dalam menentukan tranformasi Hilbert dari suatu fungsi digunakan persamaan (2.23).

2.4.3 Konvolusi untuk tranformasi Hilbert.

Dari persamaan (2.21) yaitu :

$$H(\phi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(u)\ du}{x - u}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)\ \frac{1}{x - u}\ du$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\phi(x) * \frac{1}{x}\right]$$

$$= \phi(x) * \frac{1}{\pi\ x}$$

Tranformasi Fourier dari $H(\phi)$ adalah sebagai berikut :

$$F(H\phi) = F\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(u)\ du}{x - u}\right]$$

$$= F\left[\phi(x) * \frac{1}{\pi\ x}\right]$$

$$= \sqrt{2\pi}\ \ F(\phi)\ F(\frac{1}{\pi\ x})$$

$$= \sqrt{2\pi}\ \ F(\phi)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{\pi\ x}\, dx$$

$$= F(\phi)\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx + i\ \sin sx\ \ dx}{x}$$

$$= F(\phi)\ \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx\ dx}{x} + \frac{i\ \sin sx\ \ dx}{x}\right]$$

$$= \frac{i}{\pi}\,F(\phi)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx\ \ dx}{x}$$

$$= \frac{i}{\pi}\ F(\phi)\ \pi\ ,\ \text{untuk } s > 0$$

$$= \ i\ F(\phi)\ \ ,\ \text{untuk } s > 0$$

$$= \frac{i}{\pi} F(\phi) -\pi \text{ , untuk } s < 0$$

$$= - i F(\phi) \text{ , untuk } s < 0$$

Sehingga : $F(H\phi) = i \text{ sgn } s\ F(\phi)$ 2.24

$$\text{dengan sgn } s = \begin{cases} 1 \text{ , untuk } s > 0 \\ -1 \text{ , untuk } s < 0 \end{cases}$$

Contoh 4

Tentukan tranformasi Hilbert $\phi(x) = \cos x$

Jawab :

$$H\phi = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x+y)dy}{y}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+y)dy}{y}$$

$$H\phi = -\frac{1}{\pi}\int^{\infty} \frac{(\cos x \cos y - \sin x \sin y)}{y} dy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \cos y\ dy}{y} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \sin y\ dy}{y}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y\ dy}{y}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin x\ .\pi$$

$$= \sin x$$

Jadi tranformasi Hilbert dari $\phi(x) = \cos x$ adalah:

$H\phi = \sin x$.

2.5. Ruang $L_2[a,b]$

Definisi 6

Suatu fungsi f ada pada L_2 atau ditulis $f \in L_2[a,b]$ jika :

$$\int_a^b |\ f(x)\ |^2\ dx < \infty$$

Jika $f \in L_2[a,b]$ maka norm f ditulis $|f|$

didefinisikan sebagai :

$$|f| = \left\{ \int_a^b |\ f(x)\ |^2\ dx \right\}^{1/2}$$

Contoh 5

Tunjukan bahwa fungsi $f(x) = e^{-x}$ berada dalam $L_2[o,\infty]$

Bukti :

$f(x) = e^{-x} \in L_2[o,\infty]$ maka :

$$\int_0^\infty |e^{-x}|^2\ dx = \int_0^\infty e^{-2x}\ dx$$

$$= \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-2x}\ dx = \lim_{a \to \infty} -\frac{1}{2} e^{-2x}\Big|_0^a$$

$$= \lim_{a \to \infty} -\frac{1}{2} e^{-2a} + \frac{1}{2} e^{0}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{a \to \infty} -\frac{1}{2} e^{-2a} = \frac{1}{2} + 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

Karena $\int_0^\infty |e^{-x}|^2\ dx = \frac{1}{2} < \infty$,

Jadi tebukti bahwa $f(x) = e^{-x} \in L_2[o,\infty]$

2.6. Persamaan Integral

Persamaan Integral adalah suatu persamaan dimana fungsi yang tidak diketahui katakanlah ϕ berada dalam integran dari suatu integral (dapat juga berada diluar integral).

Contoh :

$$\phi(x) - \int_a^b k(x,y)\phi(y)\, dy = f(x) \qquad \text{..........} \quad 2.25$$

$$\phi(x) - \int_a^b k(x-y)\phi(y)\, dy = f(x) \qquad \text{..........} \quad 2.26$$

Dimana f(x) dan k(x,y) diketahui, dan fungsi ϕ akan ditentukan.

Jika pada persamaan (2.25) a dan b adalah konstanta maka persamaan tersebut sering disebut sebagai persamaan integral Fredholm, jika a konstanta dan b = x maka disebut persamaan Voltera.

Jika pada persamaan (2.26) a = 0 dan b = ∞ maka persamaan integral tersebut dinamakan Persamaan Wiener-Hopf.